

225 261
224 262
235 264
236 266

14, 00''

Stirling par le TCL

Théorème: On a $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Soit $(X_n) \sim P(1)$ suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées

(IID). On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n X_k \sim P(n)$, $Z_n = \frac{S_n - n E[X_1]}{\sqrt{D[X_1]n}} = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ et $Z_n \sim N(0,1)$

① TCL (X_n) ② CVD $t \mapsto P(Z_n > t)$ ③ Calcul $\int_0^\infty P(Z > t) dt$ ④ Calcul $\int_0^\infty P(Z_n > t) dt$

① Puisque $(X_n) \in L^2(\mathbb{R}, P)^{\mathbb{N}}$ IID, par le théorème central limite, on a $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Z$ en loi.

Or F_Z est continue, donc $\forall t \in \mathbb{R}_+, F_{Z_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F_Z(t)$.

② On pose $\forall n \in \mathbb{N}, g_n: t \mapsto P(Z_n > t) = 1 - F_{Z_n}(t)$.

* $\forall n \in \mathbb{N}^*, g_n$ est mesurable positive

* $\forall t \in \mathbb{R}, g_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 - F_Z(t) = P(Z > t)$

* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \geq 1, |g_n(t)| \leq P(Z_n^2 > t^2) \leq \frac{E[Z_n^2]}{t^2}$

où $E[Z_n^2] = V[Z_n] + E[Z_n]^2 = 1$ car Z_n centrée réduite.

Donc $|g_n(t)| \leq \frac{1}{t^2} \mathbb{1}_{[0,1]}(t) + \frac{1}{t} \mathbb{1}_{[1,\infty)}(t)$ intégrable. Par convergence dominée, on a

$I_n := \int_0^\infty P(Z_n > t) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^\infty P(Z > t) dt =: I$.

③ On calcule

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{u>t} dP_Z(u) \right) dt && \text{par théorème de transfert} \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{t < u} dt \right) du && \text{par Fubini Tonelli} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-u^2/2} \right]_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

④ On calcule $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\infty P(S_n > t\sqrt{n} + n) dt \\ &= \int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^\infty P(S_n = k) \mathbb{1}_{k > t\sqrt{n} + n} \right) dt && \text{par théorème de transfert} \\ &= \sum_{k=0}^\infty P(S_n = k) \mathbb{1}_{k > n} \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{t < \frac{k-n}{\sqrt{n}}} dt \right) && \text{par Fubini Tonelli} \\ &= \sum_{k=n+1}^\infty \frac{e^{-n} n^k}{k!} \frac{k-n}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=n+1}^\infty \frac{n^k}{(k-1)!} - \sum_{k=n+1}^\infty \frac{n^k}{k!} \right) \\ &= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \frac{n}{n!} \end{aligned}$$

Puisque $\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, on en déduit que $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Lemme: $X \sim P(\lambda), Y \sim P(\mu)$ et $X \perp Y$. Alors $X+Y \sim P(\lambda+\mu)$.

On calcule $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^n P(X=k, Y=n-k) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \frac{e^{-\mu} \mu^{n-k}}{(n-k)!} \quad || \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} \end{aligned}$$

Proposition: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Soit $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ et $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. On a $v_n = \ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n+1}{e} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\right) = \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1}\right)$

Donc $v_n = -1 + (n+\frac{1}{2}) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -1 + (n+\frac{1}{2}) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -1 + 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Alors $\sum_{k=1}^n v_k = \ln\left(\prod_{k=1}^n \frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l \in \mathbb{R}$ converge et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^l =: k$.

On a $n! \sim k \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Or si $\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} \sim \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{k \sqrt{2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{(k \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n)^2} = \frac{\sqrt{2}}{k} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}$ et $\sqrt{n\pi} \sim k \sqrt{n} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$